

相关概念

1. 不变子空间, 本征子空间

1. 设 V 是有限维的, $\dim V \geq 3$ 且 $T \in \mathcal{L}(V)$ 使得 V 的每个二维子空间在 T 下不变。证明: T 是恒等算子的标量倍。
2. 设 V 是有限维的, $\dim V > 1, T \in \mathcal{L}(V)$. 证明: $\{p(T) : p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\} \neq \mathcal{L}(V)$.
3. 设 V 是有限维的, $P \in \mathcal{L}(V)$ 并且 $P^2 = P$. 证明: V 有一个子空间 U 使得 $P = P_U$ 当且仅当 P 是自伴的。
4. 设 V 是有限维的, 找一个 $T \in \mathcal{L}(V)$ 使得

$$\dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) < \dim V,$$

其中, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 是 T 的互异的本征值。

5. 设 V 是有限维的, $T \in \mathcal{L}(V)$ 且 $T^n = T$. 如果 $c \neq 1$, 计算 $(I - cT)^{-1}$.
6. 设 $\dim V \geq 2$. 证明 V 上正规算子的集合不是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间.
7. 设 V 是有限维的, $T \in \mathcal{L}(V)$ 且 T 是正规算子。证明:

$$\text{null } T^k = \text{null } T \quad \text{range } T^k = \text{range } T,$$

对于任意正整数 k .

