MA198 线性代数 习题课 VIII
May 6, 2019

---

1. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 且存在正整数 n 使得 $T^n = 0$. 证明: $(I-T)$ 是可逆的且 $(I-T)^{-1} = I + T + T^2 + \cdots + T^{n-1}$.

2. 设 V 是有限维的向量空间，$T \in \mathcal{L}(V), v \in V$ 且 $v \neq 0$. 设 p 是使得 $p(T)v = 0$ 的次数最小的非零多项式. 证明：p 的每个零点都是 T 的本征值.

3. 设 V 是有限维的复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$. 证明：对于每个 $k = 1, \ldots, \dim V$, T 都有 k 维不变子空间.

4. 设 $P \in \mathcal{L}(V)$, $P^2 = P$. 证明: $V = \operatorname{null} P \oplus \operatorname{range} P$.

5. 设 V 是有限维的向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$ 可对角化, 证明: $V = \operatorname{null} T \oplus \operatorname{range} T$.

6. 设 V 是有限维的复向量空间且 $T \in \mathcal{L}(V)$. 证明：T 可对角化当且仅当对每个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有 $V = \operatorname{null}(T - \lambda I) \oplus \operatorname{range}(T - \lambda I)$.