MA198 线性代数 习题课 VII
April 29, 2019

---

1. 设 m 是非负整数，$z_1, \ldots, z_{m+1}$ 是 $\mathbb{F}$ 中的一些不同的元素, 且 $w_1, \ldots, w_{m+1} \in \mathbb{F}$. 证明存在唯一一个多项式 $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ 使得 $p(z_j) = w_j$, 其中 $j = 1, \ldots, m+1$.

2. 设 m 是非负整数，$p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})$, 且存在不同的实数 $x_0, x_1, \ldots, x_m$ 使得 $p(x_j) \in \mathbb{R}$, 其中 $j = 0, 1, \ldots, m$. 证明 p 的系数均为实数.

3. 求下列算子的所有本征值和本征向量.

1. $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 为 $Tp = xp'$.
2. $D \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^{+\infty})$ 为 $T(z_1, z_2, \ldots) = (z_1 + z_2, z_2 + z_3, \ldots)$.

4. 令 V 是一个向量空间, $T \in \mathcal{L}(V)$. 已知 U 在 T 下不变. 若 V 是有限维的, 则 T/U 的每个本征值都是 T 的本征值.

5. 找出一个向量空间 V 和一个算子 $T \in \mathcal{L}(V)$, 以及 V 的在 T 下不变的子空间 U, 使得 T/U 的某个本征值不是 T 的本征值.

6. 对于两个 $n \times n$ 的矩阵 A 和 B, 如果存在可逆矩阵 P 使得 PAP^{-1} 和 PBP^{-1} 为对角矩阵, 那么称 A 和 B 可以同时对角化.

1. 如果 A 和 B 可以同时对角化, 证明: $AB = BA$;
2. 如果 $AB = BA$, 并且 A 有 n 个不同的特征值, 证明: A, B 可以同时对角化.

7 (Gershgorin)**.** 令 $A = (a_{ij})$ 为一个复 $n \times n$ 矩阵. 对于任意 $k \leq n$, 定义复平面上的一个闭圆盘 $D(a_{kk}, R_k)$ （圆心为 a_{kk}, 半径为 R_k）, 其中 $R_k := \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$. 我们称这些圆盘为 **Gershgorin 圆盘**.

1. 已知 λ 是 A 的一个特征值. 证明: λ 在某个 *Gershgorin* 圆盘里.
2. 若某个 *Gershgorin* 圆盘不与其他的 *Gershgorin* 圆盘相交, 证明: 在这个圆盘里存在唯一的特征值.
3. 考虑多项式 $p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0$. 记 $M := \max_{j=0}^{n-1}\{|a_j|\}$. 证明: 多项式 p 的所有的根都在圆盘 $\{z : |z| \leq 1 + M\}$ 里.