MA198 线性代数 习题课 V
April 8, 2019

---

1. 设 V 和 W 是有限维向量空间，$T \in \mathcal{T}(V, W)$. 证明：$T' = 0$ 当且仅当 $T = 0$.

2. 假设 V 是有限维向量空间，U 是 V 的一个子空间. 证明：

$$U = \{v \in V : \phi(v) = 0 \text{ 对于任意 } \phi \in U^0\}.$$

3. 设 V 是有限维向量空间，$\phi_1, \ldots, \phi_m \in V'$ 是线性无关的. 证明：

$$\dim\big((\operatorname{null}\phi_1) \cap \cdots \cap (\operatorname{null}\phi_m)\big) = (\dim V) - m.$$

4. 设 V 是向量空间，V'' 是 V 的二次对偶空间. 定义 $\Lambda : V \to V''$ 为

$$(\Lambda v)(\phi) = \phi(v)$$

对于所有的 $v \in V$ 和 $\phi \in V'$.

1. 证明: Λ 是线性的.
2. 证明: 如果 $T \in \mathcal{L}(V)$, 则 $T'' \circ \Lambda = \Lambda \circ T$.
3. 证明: 如果 V 是有限维的, 则 Λ 是 V 到 V'' 的同构.

5. 证明: $\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big)'$ 和 $\mathbb{R}^\infty$ 是同构的.

6. 假设 U 是 V 的子空间. 令 $\pi : V \to V/U$ 为商映射.

1. 证明: π' 是单射.
2. 证明: $\operatorname{range}\pi' = U^0$.