MA198 线性代数 习题课 IV
March 25, 2019

相关概念

1. $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 则 $V/(\operatorname{null} T) \cong \operatorname{range} T$.

1. 设 $U = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{F}^\infty :$ 只有有限多个 j 使得 $x_j \neq 0\}$. 证明：$\mathbb{F}^\infty/U$ 是无限维的.

2. 设 $v_1, \ldots, v_m \in V$. 令 $A = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{F}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$.

1. 证明：A 是 V 的仿射子集.
2. 证明：V 的每个包含 $v_1, \ldots, v_m$ 的仿射子集均包含 A.
3. 证明：存在 $v \in V$ 和 V 的子空间 U 满足 $A = v + U$ 且 $\dim U \leq m - 1$.

3. 设 U 是 V 的子空间满足 V/U 是有限维的. 证明：存在 V 的子空间 W 满足 $\dim W = \dim V/U$ 且 $V = U \oplus W$

4. 设 U 是 V 的子空间. $\Gamma : \mathcal{L}(V/U, W) \to \mathcal{L}(V, W)$ 定义为 $\Gamma(s) = s \circ \pi$.

1. 证明：Γ 是线性映射.
2. 证明：Γ 是单的.
3. 证明：$\operatorname{range} \Gamma = \{T \in \mathcal{L}(V, W) :$ 对所有 $u \in U$ 满足 $T(u) = 0\}$.

5. 设 V 是有限维的, $v_1, \ldots, v_m \in V$. 定义 $\Gamma : V' \to \mathbb{F}^m$ 为

$$\Gamma(\phi) = \big(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_m)\big).$$

1. 证明：$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\} = V$ 当且仅当 Γ 是单射.
2. 证明：$v_1 \ldots, v_m$ 线性无关当且仅当 Γ 是满射.

6. 设 V 是有限维的, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明: $\operatorname{range} T_1 \subseteq \operatorname{range} T_2$ 当且仅当存在 $S \in \mathcal{L}(V, V)$ 满足 $T_1 = T_2 S$.