MA198 线性代数 习题课 III
March 18, 2019

相关概念

1. 有限维：T 是可逆的 $\Leftrightarrow$ T 是满的 $\Leftrightarrow$ T 是单的.
2. 无限维：T 是可逆的 $\Leftrightarrow$ T 是满的和单的.
3. 线性映射的行列式和迹与基的选取无关.

1. 设 U 和 V 都是有限维的向量空间, 并设 $S \in \mathcal{L}(V,W), T \in \mathcal{L}(U,V)$. 证明

$$\dim \operatorname{null} ST \leq \dim \operatorname{null} S + \dim \operatorname{null} T.$$

2. 设 V 是有限维的, 且 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间使得对所有 $S \in \mathcal{L}(V)$ 和所有 $T \in \mathcal{E}$ 均有 $ST, TS \in \mathcal{E}$. 证明: $\mathcal{E} = \{0\}$ 或 $\mathcal{E} = \mathcal{L}(V)$.

3. 设 V 是有限维的, $T \in \mathcal{L}(V)$. 证明: T 是标量乘以恒等映射当且仅当对每个 $S \in \mathcal{L}(V)$ 均有 $ST = TS$.

4. 设 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 是单的, 且对每个非零多项式 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 均有 $\deg Tp \leq \deg p$. 证明:

1. T 是满的.
2. 对每个非零的 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 均有 $\deg Tp = \deg p$.

5. 设 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 和 $w_1, w_2, \ldots, w_n$ 是 V 的两个基, $T \in \mathcal{L}(V)$. 证明:

1. $\operatorname{Tr}\big(T(v_1, \ldots, v_n)\big) = \operatorname{Tr}\big(T(w_1, \ldots, w_n)\big)$.
2. $\det\big(T(v_1, \ldots, v_n)\big) = \det\big(T(w_1, \ldots, w_n)\big)$.