## 相关概念

1. 设 $T$ 是一个线性映射. $\ker T = \{0\}$ 等价于 $T$ 是单射.
2. $\mathbb{F}$ 上两个有限维线性空间同构等价于其维数相同.
3. 向量空间的积.

**1.** 用 $U_e$ 表示 $\mathbb{R}$ 上实值偶函数的集合，用 $U_o$ 表示 $\mathbb{R}$ 上实值奇函数的集合。证明: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = U_e \oplus U_o$.

**2.** 设 $b, c \in \mathbb{R}$. 定义 $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ 如下:

$$Tp = \big(3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\,\mathrm{d}\,x + c\sin p(0)\big).$$

证明 $T$ 是线性的当且仅当 $b = c = 0$.

**3.** 设 $W$ 是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明: $T$ 是满的当且仅当存在 $S \in \mathcal{L}(W, V)$ 使得 $TS$ 是 $W$ 上的恒等映射.

**4.** 设 $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ 是微分映射 $Dp = p'$. 求 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 的一个基和 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的一个基, 使得 $D$ 关于这些基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**5.** 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ 定义为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (7x_1 + 2x_2 - x_3, x_2).$$

求 $T$ 关于 $\mathbb{R}^3$ 的基 $v_1, v_2, v_3$ 和 $\mathbb{R}^3$ 的基 $w_1, w_2, w_3$ 的矩阵, 其中

- $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, -1), v_3 = (0, 0, 1)$;
- $w_1 = (1, 0), w_2 = (0, -1)$.

**6.** 给出一个向量空间 $V$ 与它的两个子空间 $U_1$ 和 $U_2$ 的例子, 使得 $U_1 \times U_2$ 同构于 $U_1 + U_2$, 但是 $U_1 + U_2$ 不是直和.

**7.** 设 $V_1, \dots, V_m$ 均为向量空间. 证明 $\mathcal{L}(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m, W)$ 和 $\mathcal{L}(V_1, W) \times \mathcal{L}(V_2, W) \times \cdots, \times \mathcal{L}(V_m, W)$ 是同构的向量空间.

**8.** 设 $V$ 是一个线性空间, $\dim V = 5$; $T \in \mathcal{L}(V, V)$. 对于任意正整数 $k$, 定义 $r_k := \dim \operatorname{range} T$. 找到一个例子: 线性映射 $T$ 满足 (或者证明不存在这样的线性映射):

1. $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7 \ldots) = (5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, \ldots)$;
2. $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7 \ldots) = (4, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$;
3. $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7 \ldots) = (4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)$.