MA198　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　线性代数　习题课 XII
June 10, 2019

---

1. 设 $T \in \mathcal{L}(C^3)$ 定义为

$$T(z_1, z_2, z_3) = (6z_1 + 3z_2 + 4z_1, 6z_2 + 2z_3, 7z_3).$$

求 T 的广义本征空间.

2. 设 $S, T \in \mathcal{L}(V)$ 且 ST 是幂零的. 证明: TS 是幂零的.

3. 设 V 是内积空间, $N \in \mathcal{L}(V)$ 是正规的并且是幂零的. 证明: $N = 0$.

4. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$. 设 $S \in \mathcal{L}(V)$ 是可逆的. 证明: T 和 $S^{-1}TS$ 有相同的本征值, 且它们的重数也相同.

5. 设 V 是 n 维复向量空间, T 是 V 上的算子使得 $\operatorname{null} T^{n-2} \neq \operatorname{null} T^{n-1}$. 证明: T 最多有两个不同的本征值.

6. 设 V 是复向量空间, $T \in \mathcal{L}(V)$. 证明: V 有一个由 T 的本征向量组成的基当且仅当 T 的每个广义本征向量都是 T 的本征向量.

7. 设 $\mathbb{F} = \mathbb{C}, T \in \mathcal{L}(V)$. 证明: 存在 $D, N \in \mathcal{L}$ 使得 $T = D + N$, 算子 D 是可对角化的, N 是幂零的, $DN = ND$.

8. 设 T 是正规的.

1. 证明: 对于任意 $v \in V$, $\|Tv\| = \|T^*v\|$.
2. 设 T 是正规的. 证明: 若 v 是 T 关于 λ 的本征向量, 则 v 是 T^* 关于 $\bar{\lambda}$ 的本征向量.
3. 设 v 是 T 的本征值, $W := \operatorname{span}\{v\}$. 证明: W 是 T 的不变子空间.
4. 设 X 是 T 和 T^* 的不变子空间, 证明: $T|_X$ 是正规的.

9. 给出复谱定理的另一个证明, 不要使用舒尔定理.