MA198 线性代数 习题课 XI

June 3, 2019

1. 找出两个自伴算子 $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$ 使得它们的本征值均为 $2, 3, 7$, 但不存在等距同构 $S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$ 使得 $T_1 = S^* T_2 S$.

2. 取定 $u, x \in V$, 其中 $u \neq 0$. 定义 $T \in \mathcal{L}(V)$ 如下: 对每个 $v \in V$ 有 $Tv = \langle v, u \rangle x$. 证明: 对每个 $v \in V$ 有 $\sqrt{T^* T} v = \frac{\|x\|}{\|u\|} \langle v, u \rangle u$.

3. 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ 由 $T(z_1, z_2, z_3) = (z_3, 2z_1, 3z_2)$. 求一个等距同构 $S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$ 使得 $T = S\sqrt{T^* T}$.

4. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$. 证明 T 和 T^* 有相同的奇异值.

5. 证明或给出反例, 若 $T \in \mathcal{L}(V)$, 则 T^2 的奇异值等于 T 的奇异值的平方.

6. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$. 证明: $\dim \operatorname{range} T$ 等于 T 的非零奇异值的个数.

7. 设 $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$. 证明: T_1 和 T_2 有相同的奇异值当且仅当存在等距同构 $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $T_1 = S_1 T_2 S_2$.