MA198 线性代数 习题课 X

May 20, 2019

---

1. 设 $v_1, \dots, v_m$ 是 V 中的线性无关向量组. 证明：存在 $w \in V$ 使得对所有 $j \in \{1, \dots, m\}$ 均有 $\langle w, v_j \rangle > 0$.

2. 设 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的规范正交基, 并设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 中的向量使得对每个 j 均有

$$\|e_j - v_j\| < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

证明：$v_1, \dots, v_n$ 是 V 的基.

3. 设 $C_{\mathbb{R}}([-1,1])$ 是区间 $[-1,1]$ 上的实值连续函数构成的向量空间，且其上的内积为：对 $f, g \in C_{\mathbb{R}}([-1,1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \,\mathrm{d}\, x.$$

给定 $C_{\mathbb{R}}([-1,1])$ 的子空间 $U = \{f \in C_{\mathbb{R}}([-1,1] : f(0) = 0)\}$. 证明: $U^{\perp} = \{0\}$

4. 设 U 是有限维的复向量空间且 $T \in \mathcal{L}(U)$.

1. 设 T 是一个正规算子. 证明：T^* 可以表示成 T 的一个多项式.
2. 设 T 和 S 是正规算子, 并且 $ST = TS$。证明 $T^*S = ST^*$ 和 $TS^* = S^*T$, 特别的, TS 是正规的。

5. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是自伴的，$\lambda \in \mathbb{F}$ 且 $\epsilon > 0$. 假设存在 $v \in V$ 使得 $\|v\| = 1$ 且

$$\|Tv - \lambda v\| < \epsilon.$$

证明：T 有一个本征值 λ' 使得 $|\lambda - \lambda'| < \epsilon$

6. 设 U 是有限维的实向量空间且 $T \in \mathcal{L}(U)$. 证明：U 有一个由 T 的本征向量构成的基当且仅当存在 U 上的内积使得 T 是自伴算子。

7. 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明：T^*T 是 V 上的正算子。