相关概念

1. 向量空间，子空间，子空间的和，直和.
2. 张成空间，线性无关，基，维数.
3. 线性映射，$\mathcal{L}(V,W)$，零空间，值域，线性代数基本定理.

1. V 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，并且 $\mathbb{F}$ 至少有三个元素. 令 V_1, V_2, V_3 是 V 的三个子空间. 证明：$V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 是 V 的子空间当且仅当其中一个子空间包含另外两个子空间.

2. 设 $U = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : \int_{-1}^{1} p = 0\}$.

(1) 求 U 的一组基.

(2) 将 (1) 中求得的基扩充为 $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ 的一组基.

(3) 求 $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ 的一个子空间 W 使得 $\mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

3. 设 $v_1, \ldots, v_m$ 在 V 中是线性无关的，并设 $w \in V$. 证明：

$$\dim \operatorname{span}(v_1 + w, \ldots, v_m + w) \geq m - 1.$$

4. 设 V_1, V_2, V_3 是有限维向量空间的子空间，证明或者给出反例：

$$\begin{aligned}\dim(V_1 + V_2 + V_3) = &\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 \\ &- \dim(V_1 \cap V_2) - \dim(V_1 \cap V_3) - \dim(V_2 \cap V_3) \\ &+ \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3).\end{aligned}$$

5. 设 $\dim V < \infty$. 证明：V 的子空间上的线性映射可以扩张成 V 上的线性映射.

6. 给出一个函数 $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得对于所有 $w, z \in \mathbb{C}$ 都有

$$\phi(w + z) = \phi(w) + \phi(z),$$

但 ϕ 不是 $\mathbb{C}$-线性映射.

7. 设 $0 < \dim V < \infty$ 和 $\dim W = \infty$. 证明：$\dim \mathcal{L}(V,W) = \infty$.

8. 设 $2 \leq \dim W \leq \dim V < \infty$. 证明：$\{T \in \mathcal{L}(V,W) : T\text{不是满的}\}$ 不是 $\mathcal{L}(V,W)$ 的子空间.

9. 令 $v = (1,0,1), u = (1,0,-1), w = (1,0,0), w' = (0,1,0)$. 以下哪些是 R^3 的线性子空间?

(1) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

(2) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 - x_3 = 0\}$.

(3) $\{av + bu + w : a, b \in \mathbb{R}\}$.

(4) $\{av + bu + w' : a, b \in \mathbb{R}\}$.

10. 计算以下线性空间的维数，并找到每个空间的一组基.

(1) 实的反对称的 4×4 矩阵.

(2) 满足 $p(2) = 0$ 并且 $p(3) = 0$ 的三次多项式 p.

(3) 满足 $p(0,0) = 0, p(1,0) = 0$ 并且 $p(0,1) = 0$ 的二元二次多项式 $p(x, y)$.

11. 设 $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^k$ 和 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 定义一个从 $\mathcal{L}(W, \mathbb{R})$ 到 $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ 的线性映射 S 如下：对于所有的 $\phi \in \mathcal{L}(W, \mathbb{R})$, 都有

$$S(\phi) = \phi \circ T.$$

证明*:* $\dim \operatorname{null} T - \dim \operatorname{null} S = n - k$.