
令 V 是一个线性空间，V' 是它的对偶空间. V 的**二次对偶空间**V'' 是 $(V')' = \mathcal{L}(\mathcal{L}(V,\mathbb{F}),\mathbb{F})$.

定义 1. 设 $v \in V$，定义 $v'' \in V''$ 如下：对于任意 $f \in V'$

$$v''(f) = f(v).$$

定义映射 $\Lambda : V \to V''$ 如下：对于任意 $v \in V$

$$\Lambda(v) = v''.$$

性质 1. Λ 是线性的.

Proof. 令 $f, g \in V'$, $v \in V$ 和 $c \in \mathbb{F}$.

$$\begin{aligned} v''(f+g) &= (f+g)(v) \\ &= f(v) + g(v) \\ &= v''(f) + v''(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v''(cf) &= (cf)(v) \\ &= cf(v) \\ &= cv''(f) \end{aligned}$$

□

性质 2. 令 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 是 V 的一组基. 令 $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ 是它的对偶基. 那么，$\{v_1'', \ldots, v_n''\}$ 是 $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ 的对偶基.

Proof. 我们只需验证

$$v_i''\phi_j = \phi_j(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i = j; \\ 0 & \text{如果 } i \neq j. \end{cases}$$

□

推论 1. 若 V 是有限维线性空间，Λ 是 V 到 V'' 的一个同构.

定义 2. 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 定义 T 的**二次对偶**为 $T'' = (T')' : V'' \to W''$.

性质 3. $T''(v'') = T(v)''$

Proof. 只需要验证 $T''(v'')(f) = T(v)''(f)$ 对于任意的 f 成立.

$$\begin{aligned} T''(v'')(f) &= v''(T'(f)) \quad &&(T'' \text{ 是 } T' \text{ 的对偶}) \\ &= T'(f)(v) &&(v'' \text{ 的定义}) \\ &= f(T(v)) &&(T' \text{ 是 } T \text{ 的对偶}) \\ &= T(v)''(f) \end{aligned}$$

□

等式 $T''(v'') = T(v)''$ 意味着 Λ 是 V 和 W 到 V'' 和 W'' 的自然同构, 或者说有如下交换图表成立:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "T"'] & V'' \arrow[d, "T''"] \\ W \arrow[r, "\Lambda"] & W'' \end{tikzcd}$$