给定一个集合 $S$ 以及正整数 $k$, 我们用 $\binom{S}{k}$ 表示 $S$ 的 $k$ 元子集.

一个 **(有限) 简单图**$G$ 由**顶点集**$V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ 和**边集** $E=\{e_1,\ldots,e_m\}$, 其中 $E\subseteq\binom{V}{2}$.

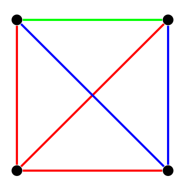
简单图 $G$ 的**邻接矩阵**是一个 $p\times p$ 阶矩阵 $A=\mathbf{A}(G)$, 其 $(i,j)$-元

$$a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{如果 } \{v_i,v_j\}\in E;\\ 1 & \text{如果 } \{v_i,v_j\}\notin E.\end{cases}$$

我们用 $\mathrm{K}_n$ 表示 $n$ 个顶点的**完全图**, 其顶点集为 $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$, 边集为 $E=\binom{V}{2}$, 等价于每个任意两个不同的顶点间都有一条边. **完全二部图**$\mathrm{K}_{s,t}$ 有顶点集 $V=\{x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_t\}$, 边集 $E=X\times Y$ 其中 $X=\{x_1,\ldots,x_s\}$, $Y=\{y_1,\ldots,y_t\}$. 注意到

$$\mathbf{A}(\mathrm{K}_n)=\mathbf{J}_n-\mathbf{I}_n$$
$$\mathbf{A}(\mathrm{K}_{s,t})=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{s\times s} & \mathbf{J}_{s\times t}\\ \mathbf{J}_{t\times s} & \mathbf{0}_{t\times t}\end{pmatrix}$$

下图展示完全图 $K_4$ 的边集可以划分成三个完全二部图的边集。显然我们可以推广这个构造，将 $K_n$ 的边集划分成 $n-1$ 个完全二部图的边集。那么 $E(K_n)$ 是否可以划分成少于 $n-1$ 个完全二部图的边集?



**Theorem 1.** 如果 $E(K_n)$ 划分成 $m$ 个完全二部图的边集，那么 $m\geq n-1$.

**Lemma 1.** 如果 $n\times n$ 阶实矩阵 $T$ 满足 $T+T^t=\mathbf{J}-\mathbf{I}$, 那么 $\operatorname{rank}T\geq n-1$.

*Proof.* 我们用反证法，假设 $\operatorname{rank}T\leq n-2$. 那么 $T$ 的解空间的维数大于 2, 故存在两个线性无关的向量 $x,y$ 满足 $Tx=Ty=0$. 因为 $\operatorname{rank}\mathbf{J}=1$, 存在非零向量 $z\in\operatorname{span}(x,y)$ 满足 $\mathbf{J}z=0$. 由 $T+T^t=\mathbf{J}-\mathbf{I}$ 可得 $-z=T^tz$。于是等式两边左乘 $z^t$ 可得

$$\begin{aligned}-|z|^2&=z^tT^tz\\&=(z^tT^tz)^t && (1\times 1\text{ 矩阵是对称阵})\\&=z^tTz && ((AB)^t=B^tA^t)\\&=0 && (Tz=0)\end{aligned}$$

这与 $z$ 不等于 $0$ 矛盾. $\square$

*Proof of Theorem 1.* 设 $E(\mathrm{K}_n) = E(H_1) \sqcup E(H_2) \sqcup \cdots \sqcup E(H_m)$, 其中 $H_k$ 是顶点二分为 $(X_k, Y_k)$ 的完全二部图。对于每个 $k \in \{1, \ldots, m\}$, 定义 $n \times n$ 阶矩阵 $T_k$ 如下:

$$(T_k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i \in X_k, j \in Y_k; \\ 0 & \text{否则.} \end{cases}$$

注意到 $T_k + T_k^t = \mathbf{A}(H_k)$, 并且 $\operatorname{rank}(T_k) = 1$. 令 $T = \sum_{k=1}^{m} T_i$. 由 Lemma 1, $\operatorname{rank} T \geq n-1$. 同时 $\operatorname{rank} T \leq \operatorname{rank} T_1 + \cdots + \operatorname{rank} T_m = m$, 故 $m \geq n-1$. $\square$