

上海交通大学试卷

(2018 至 2019 学年第 1 学期)

班级号 _____ 学号 _____ 姓名 _____

课程名称 _____ 图与网络 (MA413) _____ 成绩 _____

第 1 题：网络流 [20 分]

已知 A 是一个行和与列和都是整数的 $n \times n$ 的实数矩阵。证明：存在一个 $n \times n$ 的整数矩阵 B 同时满足以下两个条件：

- 对于任意的 $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $B(i, j) = \lceil A(i, j) \rceil$ 或者 $B(i, j) = \lfloor A(i, j) \rfloor$;
- 对于任意的 $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^n A(i, j) = \sum_{j=1}^n B(i, j)$, 以及 $\sum_{j=1}^n A(j, i) = \sum_{j=1}^n B(j, i)$ 。

我承诺，我将严格遵守考试纪律。 承诺人：_____	题号	1	2	3	4	5	6	合计
	得分							
	批阅人							

第 2 题： 立方体 [20 分]

令 H_n 是 n 维立方体。

- (a) [5 分] 证明： H_n 是二分图。
- (b) [5 分] 计算 H_n 的支撑树 (spanning tree) 的个数。
- (c) [5 分] 令 $\overline{H_n}$ 为 H_n 的补图，计算 $\overline{H_n}$ 的支撑树的个数。
- (d) [5 分] 令 uv 是 H_n 的一条边。假设在 H_n 的每一条边上都放一个 1 欧姆的电阻，计算 uv 间的电阻。

第 3 题： 稳定匹配 [20 分]

令 G 是一个二部图 $(A \cup B, E)$ 。对于每个顶点 $v \in A \cup B$, $<_v$ 是邻域 $N(v)$ 上的全序。记 $L = \{<_v \mid v \in A \cup B\}$ 。
令 \mathcal{M} 是 G 上关于 L 的全体稳定匹配的集合。

- (a) [5 分] 对于 $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, 称 $M_1 \preceq M_2$ 如果对于所有 $x \in V$, $xy_1 \in M_1, xy_2 \in M_2 \Rightarrow y_1 <_x y_2$ 。证明：
 (\mathcal{M}, \preceq) 是一个偏序集。
- (b) [10 分] 对于 $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, 令

$$M_1 \wedge M_2 := \left\{ ab \mid a \in A, b = \min_{<_a} \{b_1, b_2 \mid ab_1 \in M_1, ab_2 \in M_2\} \right\}$$
$$M_1 \vee M_2 := \left\{ ab \mid a \in A, b = \max_{<_a} \{b_1, b_2 \mid ab_1 \in M_1, ab_2 \in M_2\} \right\}.$$

证明： $M_1 \wedge M_2, M_1 \vee M_2$ 都是稳定匹配。

- (c) [5 分] 对于 $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}$, 证明： $(M_1 \wedge M_2) \vee M_3 = (M_1 \wedge M_3) \vee (M_2 \vee M_3)$ 。

第 4 题： 树宽 [20 分]

令 $G = (V, E)$ 是一个图。考虑下列三种操作：

- 操作 A: 如果 G 中的两个顶点间有 2 条或者更多的边，删除其中一条边。
- 操作 B: 令 v 是 G 中的一个二度点， a, b 是 v 的邻居。删除顶点 v 以及边 av, bv ，再添加边 ab 。
- 操作 C: 令 v 是 G 中的一个三度点， a, b, c 是 v 的邻居。删除顶点 v 以及边 av, bv, cv ，再添加边 ab, bc, ca 。

已知 G 是 2-连通图。证明： $tw(G) \leq 3$ 当且仅当 G 可以通过一系列的上述三种操作得到一个只有两个顶点的图。

第 5 题： 双曲率 [10 分]

令 (X, d) 为一个度量空间。对 $p, x, y \in X$, 定义 $g_p(x, y) = d(p, x) + d(p, y) - d(x, y)$ 。对任一 $p \in X$, 令 δ_p 为最小的非负实数使得对任意 $x, y, z \in X$ 都成立 $g_p(x, y), g_p(y, z), g_p(z, x)$ 中最小两数的差不超过 δ 。请说明是否会存在 $p, q \in X$ 使得 $\delta_p = 0$ 而 $\delta_q > 0$; 是否会存在 $p, q \in X$ 使得 $\delta_p = \infty$ 而 $\delta_q < \infty$ 。

第 6 题： 图定向 [10 分]

设 G 为一个有限图， λ 是一个从 $V(G)$ 到非负整数的映射。假设对任何 G 的顶点诱导子图 H ，都有 $|E(H)| \leq \sum_{v \in V(H)} \lambda(v)$ 。试说明存在 G 的边定向，使得定向图的每个顶点 v 的入度都不超过 $\lambda(v)$ 。