
提交时间: November 19

1. 令 A 是一个整数方阵, p 是一个素数. 证明:

$$\text{Tr}(A^p) \equiv \text{Tr}(A) \pmod{p}.$$

2. 令 x 是一个整数, 且知道它是所有素数 p 的平方剩余. 证明: x 是一个完全平方.

3. 令多项式 $g(x) = (x^2 - 5)(x^2 - 41)(x^2 - 205)$. 证明:

1) g 没有整数零点.

2) 对于任意正整数 n , 同余方程 $g(x) \equiv 0 \pmod{n}$ 总有解.

4. 令正整数 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 = z^2$ 和 $\gcd(x, y) = 1$. 证明:

1) 在 $\mathbb{Z}[i]$ 中, $x + yi$ 与 $x - yi$ 是互素的.

2) 利用上述结论说明存在正整数 $s > t$ 使得 $\{x, y, z\} = \{s^2 - t^2, 2st, s^2 + t^2\}$.

5. 证明: 一个整数是两个有理数的平方和当且仅当它是两个整数的平方和.

6. 对正整数 n , 令 G_n 为一个有向图, 顶点集合为 \mathbb{Z}_n , (i, j) 为 G_n 的一条弧当且仅当 $j - i$ 是 n 的二次剩余. 请描述 G_{27} 和 G_{81} 的结构.

