

提交时间: October 29, 2019

1. 令 $p > 3$ 为一个素数. 求证:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

2. 令 p 为一个素数, a 为一个小于 p 的正整数. 求证: 对于任意 b ,

$$x = b(-1)^{a-1} \frac{(p-1) \cdots (p-a+1)}{a!}$$

满足

$$ax \equiv b \pmod{p}.$$

3. 设 q 为奇素数, f 是 $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 到自身的双射. 试说明: 存在 $[i]_q \neq [j]_q$, 使得 $[i]_q f([i]_q) = [j]_q f([j]_q)$.

4. 令 p 是一个素数. 设 $f(x_1, \dots, x_n)$ 为一个最高次数小于 n 而常数项为零的整系数多项式. 求证: 存在 $(x_1, \dots, x_n) \not\equiv (0, \dots, 0) \pmod{p}$ 使得

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}.$$

提示: 考虑 $f(x_1, \dots, x_n)^{p-1} - 1 + (1 - x_1^{p-1}) \cdots (1 - x_n^{p-1})$.

