本次作业中出现的一些符号：

- $\mathrm{I}(a) := \{ak : k \in \mathbb{Z}\}$.

1. 令 M 为 $m_1, \ldots, m_k$ 的最小公倍数。

1) 求证：存在整数 $c_1, \ldots, c_k$ 满足

$$c_1 \frac{M}{m_1} + \cdots + c_k \frac{M}{m_k} = 1.$$

2) 考虑 k 个同余方程做成的方程组：

$$x \equiv a_i \mod (m_i), \quad i \in \{1, \ldots, k\}$$

试说明方程组有解当且仅当其中任两个方程联立有解。同时请说明所有的解的集合或者为空集或者为

$$\{a_1 c_1 \frac{M}{m_1} + \cdots + a_k c_k \frac{M}{m_k} + tM : t \in \mathbb{Z}\}.$$

2. 给定一个自然数 k, 求证：存在 k 个连续的自然数满足每一个数都可以被大于 1 的完全平方数整除。

3. 设 $\gcd(a, b) = 1$. 求证：对于任意正整数 k, 存在正整数 n, 满足

$$a + nb, a + (n+1)b, a + (n+2)b, \ldots, a + (n+k)b$$

都是合数。

4 (平面上有任意大的原点不可见方块)**.** 对于任意正整数 N, 求证: 存在 $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, 满足对于任意 $j, k \in \{0, \ldots, N\}$,

$$\gcd(a + j, b + k) > 1.$$

5. 令 $f(x)$ 为一个整系数多项式。求证：如果存在有限多个素数 $p_1, \ldots, p_r$ 满足

$$\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{I}(p_i),$$

则存在一个素数 p_i 使得

$$\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathrm{I}(p_i).$$

6. 令 $f(x)$ 为一个整系数多项式。如果存在有限多个素数 $p_1, \ldots, p_r$ 满足

$$\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{I}(p_i^2),$$

能否找到一个素数 p_i 使得

$$\{f(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathrm{I}(p_i)?$$

7. 求解下述同余方程组：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mod \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$