MA199　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　初等数论　习题 IV
September 30, 2019

---

1. 令 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 为 n 个正整数。试说明,存在一个 n 阶整数方阵,其行列式等于 $\mathsf{gcd}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,其第一行的 n 个元素依次为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

2. 令 F_n 为第 n 个斐波那契数:$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. 求证:$\mathsf{gcd}(F_n, F_m) = F_{\mathsf{gcd}(n,m)}$.

3. *K.H. Rosen* 写的《初等数论及其应用》*[Ros00]* 一书的 *3.1* 节习题 *28* 要求读者证明 *Bertrand's Postulate.* 请参阅网页*:*

https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/BertrandPostulate.shtml

来理解这个结果及其证明。请为此结果及其证明写一个投影片,准备一个可能的 *15* 分钟的课堂演讲。

4. *(i)* 令 g 为 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射:$x \mapsto 2^x$. 试说明:存在一个实数 b, 使得

$$\lfloor g^t(b) \rfloor \qquad t = 1, 2, \ldots$$

都是素数, 其中 g^t 表示 $\underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{t}$. *(*提示:利用 *Bertrand's Postulate)*

(ii) 如果函数 g 改为 $g : x \mapsto 2^x - 1$. 结论还成立吗?

5. 对于任意正整数 n,定义 X_n 为 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的映射:

$$X_n(i) = j, \qquad 0 \le j < n, n|(i-j).$$

用 E 表示一个函数的均值,而用 Cov 来表示两个函数的协方差,即 $\mathsf{Cov}(X, Y) = \mathsf{E}(XY) - \mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(Y)$. 求证:$\mathsf{Cov}(X_n, X_m) = \frac{1}{12}\big((\mathsf{gcd}(m,n))^2 - 1\big)$.

6. 给定三个正整数 a, b, c. 两个人轮流操作, 每次可以用其中一数减去另一数的正整数倍,但不能减成负数。获胜方是第一个把其中一个数变成 0 的人。试讨论先手必胜或后手必胜的条件。

7. 一根两头打开的绳子上依次排列了价值为 *1*,*2*,*16*,*2*,*4*,*40*,*20*,*1*,*12*,*8* 的珍珠。两人轮流从绳子上取珍珠,每次只能选择绳子左端或右端拿下一颗珍珠。两位选手都绝顶聪明,都希望拿到总价值尽可能多的珠宝。试估计先手应该拿到多少价值的珍珠。

References

[Ros00] Kenneth H. Rosen. *Elementary number theory and its applications*. Fourth. Addison-Wesley, Reading, MA, 2000, pp. xviii+638. ISBN: 0-201-87073-8.