1. 令 n 是一个正整数, 求证：

$$n! = \prod_{\substack{p \le n \\ p \text{ is a prime}}} p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \cdots}.$$

2. 证明：

1. 有无穷多个 $3k+2$ 型的素数.
2. 有无穷多个 $4k+3$ 型的素数.
3. 有无穷多个 $6k+5$ 型的素数.
4. 有无穷多个 *Mersenne* 数为合数.

3. 设 x, y, z 为三个正整数。求证：$(xy+1)(yz+1)(zx+1)$ 是一个完全平方数当且仅当 $xy+1, yz+1, zx+1$ 都是完全平方数.

4. 令 n 是一个自然数。假设对于任意的非负整数 $x \le \sqrt{\frac{n}{3}}$, x^2+x+n 都是素数。试说明 n 一定是欧拉幸运数 $2, 3, 5, 11, 17, 41$ 之一.

提示: 假设存在 $y \le n-2$ 使得 y^2+y+n 是合数。取一个尽可能小的 y, 说明 y^2+y+n 的最小素因子 p 满足 $p \ge 2y+1$，从而得到 $y \le \sqrt{\frac{n}{3}}$.

5. 令 A 是一个正整数的集合. 如果极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [n]|}{n}$ 存在, 我们称之为 A 的算术密度，并记之为 $\mathrm{dens}(A)$. 对于任意实数 $s > 1$, 定义

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

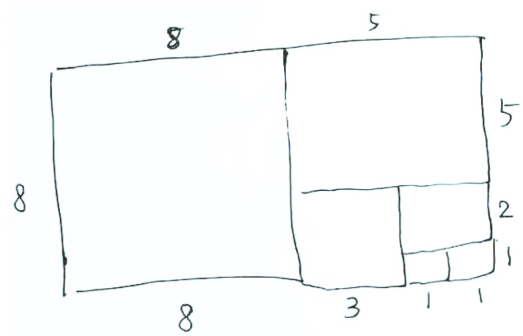
令 $P_s(A) := \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n\in A} \frac{1}{n^s}$. 证明：$\lim_{s\to 1^+} P_s(A) = \mathrm{dens}(A)$.

6. 设 $\mathrm{dens}(A) > 0$。试说明 $\sum_{a\in A} \frac{1}{a} = \infty$.

7. 令 A 为全体素数的集合. 证明：$\mathrm{dens}(A) = 0$.

8. 对一个矩形 R, 令 $h(R)$ 表示最少可能的（大小未必一致的）正方形个数，使得该矩形能被这些正方形各边平行摆置地覆盖，且正方形面积和等于矩形面积。令 m 和 n 为正整数. 对一个边长是 m 和 n 的矩形 S, 我们可以使用下面的贪心算法 *(*辗转相除法*)* 来实现划分*:* 假设 $m \le n$, 我们将矩形划分成 A 和 B 两块, 其中 A 是边长为 m 的正方形, B 是边长为 $n-m$ 和 m 的矩形. 然后对矩形 B 用同样的方式继续划分.

1. 若采用上述贪心方法进行划分, 最终会将矩形 S 划分成多少块正方形*?* 能否对此个数做上下界估计?



2. 令 $\{F_i\}$ 为斐波那契数列. 试说明 $\frac{F_i}{F_{i+1}}$ 是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的各项连分数逼近。

3. 当 $n = F_{i+1}, m = F_i$ 时, 上述贪心方法给出了拆成正方形的最佳方案么?

4. 设 $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots$ 是圆周率的连分数逼近序列。令 R_i 为边长分别是 P_i 和 Q_i 的矩形。对小的参数 i 计算 $h(R_i)$。你认为 $h(R_i)$ 会是一个严格递增序列么?