1. 设 x 是一个实数. 求证：x 为无理数当且仅当存在无限个整数对 (p,q) 使得 $q \geq 1$, gcd$(p,q)=1$，并且 $|x-\frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$.

2. 令 A 和 B 为正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 的两个非空子集满足 $|A| \geq |B| = 4$. 求证：

$$\max_{a\in A, b\in B}\{\max\{\frac{a}{\mathrm{gcd}(a,b)}, \frac{b}{\mathrm{gcd}(a,b)}\}\} \geq 4.$$

3. 令 $\mathrm{I}^+(a,b)$ 表示 a 与 b 的全体非负线性组合的集合. 试说明: 如果正整数 a 与 b 互素，那么对任意整数 t, t 与 $ab-a-b-t$ 中恰有一个属于 $\mathrm{I}^+(a,b)$.

4. 试说明: $2, 3, 4+\sqrt{10}, 4-\sqrt{10}$ 均为数系 $\{m+n\sqrt{10}\}$ 中的不可约元素。

5. 设 f 为次数至少为 1 的单变量整系数多项式. 求证: 集合 $\{f(x) : x \in \mathbb{Z}\}$ 中有无限多个合数.

6. 求证：$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ 是一个整数当且仅当 $n=1$.

字母表 $\mathcal{A}$ 是一个集合. 我们称一个序列 $W = w_1w_2, \ldots w_n \in \mathcal{A}^n$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个**字**. W 的长度是 n，记作 $|W|$. 设 $X = x_1 \cdots x_n$ 和 $Y = y_1 \cdots y_m$ 为 $\mathcal{A}$ 的两个字, 定义 $XY := x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m$.

7. 设 $W_1, \ldots, W_n$ 为 n 个有限长的字, 满足

$$\begin{aligned} & W_1W_2\cdots W_{n-1}W_n \\ =& W_2W_3\cdots W_nW_1 \\ & \cdots \\ =& W_nW_1W_2\cdots W_{n-1}. \end{aligned}$$

试说明: 存在一个长度为 gcd$(|W_1|, ..., |W_n|)$ 的字 X，使得对于任意 $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, 都存在 c_i 使得 $W_i = X^{c_i}$.

8. 设 A 为一个 $n\times n$ 方阵，其每行每列的 n 个元素都是 $\{1,\ldots,n\}$. 设 $W_1,\ldots,W_n$ 为 n 个有限长的字, 满足 $W_{A(i,1)}W_{A(i,2)}\cdots W_{A(i,n)}$ 是一个与 i 无关的字. 是否可以得出以下结论: 存在一个字 X，使得对于任意 $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, 都存在 c_i 使得 $W_i = X^{c_i}$?

设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 满足 $ad-bc \neq 0$. 定义 $f_A : \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 为

$$f_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}.$$

f_A 被称作一个**莫比乌斯变换 (Möbius transformation)**.

9. 设一个实数 x 的正规连分数展开为 $[q_0; q_1, q_2, \ldots]$. 令 $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & q_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 对于所有正整数 i, 令 $A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_i \end{bmatrix}$. 求证：$f_{A_0 A_1 \cdots A_n}(0) = [q_0; q_1, \ldots, q_n]$.