我们用 $[a_0; a_1, \ldots a_n]$ 来表示连分数

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

1. 令 $x \in \mathbb{R}$ 为一个实数*.* x 的正规连分数展开 *(regular continued fraction expansion)* 为 $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$. 令既约分数 $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$. 证明*:* 如果一个分数 $\frac{p}{q}$ 满足 $0 < q \leq q_k$，则

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p_k}{q_k} \Rightarrow \left|x - \frac{p}{q}\right| > \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right|.$$

若将条件 $0 < q \leq q_k$ 换成 $0 < q < q_{k+1}$，上述结论是否依旧成立*?*

2 (欧几里得游戏)**.** 给定两个正整数 $a \geq b$. 两个人轮流操作, 每次可以用较大数减去较小数的正整数倍 *(*不能减成负数*)*, 获胜方是第一个把其中一个数变成 0 的人。求先手必胜的充要条件。