上 海 交 通 大 学 试 卷（答 案）

（2019 至 2020 学年第 1 学期）

课程名称 初等数论

第 1 题： 选择题 [共 21 分]

1.1 [3 分] 15125 与 25256 能否表示成两个整数的平方和？ （B）

(A) 都不能　　(B) 仅 15125 能
(C) 仅 25256 能　　(D) 都能

1.2 [3 分] 令 k 为三维实空间中一条直线上的全体整点的集合的势。k 的可能取值有多少种？ （B）

(A) 2 种　　(B) 3 种
(C) 可数无穷种　　(D) 不可数多种

1.3 [3 分] 下面各数中哪一个没有原根？ （B）

(A) 4　　(B) 8
(C) 9　　(D) 18

1.4 [3 分] 最小的可以被所有判别式为 -100 的整正定二元二次型表出的 (正) 整数为哪一个？ （B）

(A) 5　　(B) 25
(C) 100　　(D) 不存在

1.5 [3 分] 令 A 为一个正整数集合，令 α_n 表示 A 中不超过 n 的元素的个数，并且令 $\alpha \doteq \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} > 0$。$\sum_{a\in A} \frac{1}{a}$ 等于多少？ （C）

(A) $\frac{\pi^2+\pi^4+\pi^6}{1-\alpha}$　　(B) $\frac{1}{1-\alpha^2}$
(C) ∞　　(D) 具体取值不能仅由 α 决定

1.6 [3 分] $2^{2^5}+1$ 含有下述哪一个素因子？ （D）

(A) 2　　(B) 11
(C) 101　　(D) 641

1.7 [3 分] 实数轴上是否存在一族开区间，使得每个有理数都只被其中有限个区间覆盖，每个无理数都被其中无限个区间盖住？ （A）

(A) 存在　　(B) 不存在
(C) 存在性与选择公理等价　　(D) 由 Godel 不完全性定理可知这无法判定

第 2 题： 填空题 [共 30 分]

2.1 [5 分] $11x+8y=600$ 的正整数解 (x,y) 的个数为__6__。

2.2 [5 分] 7^{2020} 在十进制展开中最后两位是__01__。

2.3 [5 分] 称 2 的幂次或者 2 的幂次的 3 倍为一个好数。把 100 颗一模一样的珠子分成大小不一的若干堆，使得每一堆里头的珠子个数都是好数。这种分法的个数为___34___。

2.4 [5 分] 模 257 的原根共有___128___ 个。

2.5 [5 分] $\left(\frac{17}{47}\right) =$___1___ （填一个整数）。

2.6 [5 分] $13x = 71 \pmod{380}$ 的解为___327+380k___。

第 3 题： 计算题 [10 分]

试确定 $y^2 + x - x^3 = 0$ 的所有整数解 (x, y)。

原方程可化为 $y^2 = x(x^2 - 1)$.

由于 $\gcd(x, x^2 - 1) = 1$, 故 $x^2 - 1$ 为完全平方数, 记为 A^2.

当 $|x| \geq 2$ 时，$1 = x^2 - A^2 = (x - A)(x + A) \geq 1(x + A) \geq 2$. 故没有解.

当 $|x| \leq 1$ 时，代入方程可得解 $(-1, 0)$, $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$.

第 4 题： 证明题 [10 分]

试说明存在一个常数 b, 使得序列 $\lfloor 2^b \rfloor, \lfloor 2^{2^b} \rfloor, \lfloor 2^{2^{2^b}} \rfloor, \ldots$ 中的所有项都是素数。（提示：可以利用贝特朗假设，即对于任意实数 $x \geq 1$, 区间 $[x, 2x]$ 中至少包含一个素数）

令 $p_1 = 5$. 由贝特朗假设，可以选取一列素数 $p_i, i \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $p_{i+1} \in [2^{p_i}, 2^{p_i+1}]$.

令 $x_i = \underbrace{\log_2 \log_2 \cdots \log_2}_{i} p_i$, $y_i = \underbrace{\log_2 \log_2 \cdots \log_2}_{i}(p_i + 1)$ 其中 $i \in \mathbb{Z}_+$.

由闭区间套定理，$\bigcap_{i \in \mathbb{Z}_+} [a_i, b_i]$ 非空，在其间任取一个元素 b. 可验证满足题设.

第 5 题： 证明题 [10 分]

已知一个整数 n 可以写成两个有理数的平方和。试说明 n 可以表为两个整数的平方和。

设 $n = (\frac{a}{b})^2 + (\frac{c}{d})^2 = \frac{a^2d^2 + b^2c^2}{b^2d^2}$.

由二平方和定理，$a^2d^2 + b^2c^2$ 的每个 $4k + 3$ 型素因子都是偶数次幂的.

由于 b^2d^2 的每个素因子都是偶数次幂的，所以 $\frac{a^2d^2+b^2c^2}{b^2d^2} = n$ 的每个 $4k + 3$ 型素因子都是偶数次幂的.

再由二平方和定理，n 可以表示成两个整数的平方和.

第 6 题： 证明题 [共 19 分]

6.1 [5 分] 对任意正整数 m，说明 $x^2 + 11y^2 = 3 \pmod{2^m}$ 有解。

引理 1 若 $d=1 \pmod 8$, 则 $x^2-d=0 \pmod{2^m}$ 对任意 m 都有解.

证明：记 $f(x)=x^2-d$, $a_0=1$, $f'(x)=2x$, $c=\mathsf{ord}_2(f'(a))=1$. 由 Hensel 引理，$x^2-d=0 \pmod{2^{2c+2^n}}$ 有解. 故 $x^2-d=0 \pmod{2^m}$，对任意 m 有解.

令 $x=0$, 我们将证明 $11y^2=3 \pmod{2^m}$ 有解. 验证 $\frac{3}{11}=1 \pmod 8$. 由引理 1，$y^2=\frac{3}{11} \pmod{()2^m}$ 有解，故 $11y^2=3 \pmod{2^m}$ 有解. 进而 $x^2+11y^2=3 \pmod{2^m}$ 有解.

6.2 [5 分] 对任意正整数 m，说明 $x^2+11y^2=3 \pmod{11^m}$ 有解。

引理 2 令 p 是奇素数, 满足 $\gcd(p,d)=1$. 若 $x^2-d=0 \pmod p$ 有解, 则 $x^2-d=0 \pmod{p^m}$ 对任意 m 都有解.

证明：记 $f(x)=x^2-d$, $a_0^2-d=0 \pmod p$, 验证 $f'(a_0)\neq 0$, $f(a_0)=0$. 由 Hensel 引理，$x^2-d=0 \pmod{2^m}$，对任意 m 有解.

令 $y=0$, 我们将证明 $x^2=3 \pmod{p^m}$ 有解. 验证 $x=5$ 是 $x^2=3 \pmod{p^m}$ 的一个解. 由引理 2，$x^2=3 \pmod{()2^m}$ 有解. 故 $x^2+11y^2=3 \pmod{11^m}$ 有解.

6.3 [5 分] 对任意素数 $p\neq 2,11$ 以及任意正整数 m，说明 $x^2+11y^2=3 \pmod{p^m}$ 有解。

对于 $p\neq 2,11$，可得
$$\#\{x^2 : x\in\mathbb{Z}_p\}=\frac{p-1}{2}+1=\#\{11y^2 : y\in\mathbb{Z}_p\}.$$
由鸽笼原理,$x^2+11y^2=3 \pmod p$ 存在解 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$.

当 $x_0\neq 0$, 令 $f(x)=x^2+(11y_0^2-3)$，由引理 2，命题得证.

当 $x_0=0$, 令 $f(y)=11y^2-3$，由引理 2，命题得证.

6.4 [4 分] 对任意整数 n，说明 $x^2+11y^2=3 \pmod n$ 有解。

由前三问的结论与中国剩余定理可得.